МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
"Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова"(РИИ АлтГТУ)

Г.В. ДЕМИДЕНКО, И.И. МАТВЕЕВА

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для студентов
направления "Информатика и вычислительная техника"

Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиал) ФГБОУ ВО "Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова"в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению "Информатика и вычислительная техника"

Рубцовск 2016

УДК 517.9

Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие для студентов направления "Информатика и вычислительная техника". / Рубцовский индустриальный институт. - Рубцовск, 2016. - 79 с.

Пособие содержит теоретический материал по обыкновенным дифференциальным уравнениям и включает следующие темы: системы линейных дифференциальных уравнений и уравнения произвольного порядка; краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений; нелинейные дифференциальные уравнения; зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров.

Рассмотрено и одобрено на
заседании НМС Рубцовского
индустриального института.
Протокол №1 от 19.02.2016 г.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент, зам. директора по УР В.Г. Дудник

Полезно решать дифференциальные уравнения

И. Ньютон

Введение

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где функция $F(t, u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ определена в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ ($F'_{u_{n+1}}(t, u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) \not\equiv 0$), $t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ — независимая переменная, $y(t)$ — неизвестная функция от t, $y^{(j)} = \dfrac{d^j y}{dt^j}$ — производные j-го порядка функции $y(t)$, $j = 1, \dots, n$. Зачастую обыкновенное дифференциальное уравнение (1) можно разрешить относительно старшей производной $y^{(n)}$ и записать в виде

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}).$$

Основная цель настоящего пособия — способствовать приобретению студентами необходимых знаний по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, практических навыков решения и исследования дифференциальных уравнений, развитию умения проводить анализ свойств решений дифференциальных уравнений.

Пособие состоит из трех глав и списка литературы. В первой главе излагаются основные теоремы для систем линейных дифференциальных уравнений и уравнений произвольного порядка. Вторая глава посвящена теории краевых задач для линейных дифференциальных уравнений. В третьей главе излагаются основные теоремы для нелинейных дифференциальных уравнений и приводятся некоторые способы интегрирования дифференциальных уравнений.

Пособие подготовлено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ГЛАВА 1.
Линейные дифференциальные уравнения

В этой главе мы будем рассматривать системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t)$$

и линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{du}{dt} + a_n(t)u = \varphi(t).$$

§ 1.1. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений

Однородными системами линейных дифференциальных уравнений первого порядка называются системы следующего вида:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \qquad t \in (a, b), \tag{1.1.1}$$

где $A(t)$ — заданная матрица размера $n \times n$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $a_{ij}(t) \in C[a, b]$.

Определение. Вектор-функция

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in C^1(a, b)$$

называется *решением* системы (1.1.1), если выполнено тождество

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv A(t)y(t), \qquad t \in (a, b).$$

Пусть заданы $t_0 \in (a, b)$, $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T \in \mathbb{C}^n$. Задача о нахождении решения $y(t)$ системы (1.1.1), принимающего при $t = t_0$ значение y_0, называется *задачей Коши*, т. е. постановка задачи Коши имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A(t)y, \qquad t \in (a, b), \\ y|_{t=t_0} = y_0. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Теорема 1.1.1. *При любых $t_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{C}^n$ существует единственное решение $y(t) \in C^1(a, b)$ задачи Коши (1.1.2).*

Отметим, что задача Коши (1.1.2) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений Вольтерра:

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(\xi)y(\xi)\, d\xi, \qquad t \in (a, b). \tag{1.1.3}$$

При этом для доказательства теоремы достаточно показать однозначную разрешимость системы (1.1.3) в классе непрерывных вектор-функций на (a, b). Для нахождения решения можно построить последовательность приближенных решений $\{y^k(t)\}$ вида

$$y^0(t) \equiv y_0,$$

$$y^k(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(\xi)y^{k-1}(\xi)\, d\xi, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Нетрудно показать, что на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, содержащем t_0, эта последовательность равномерно сходится

$$y^k(t) \ \to \ y(t), \qquad k \to \infty,$$

при этом предельная функция является решением систем (1.1.3), и следовательно, решением задачи Коши (1.1.2).

Указанный метод построения приближенных решений позволяет выписать решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в виде степенного ряда.

Теорема 1.1.2. *Пусть A — постоянная матрица размера $n \times n$. Тогда для любых $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T \in \mathbb{C}^n$ решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

представимо в виде степенного ряда

$$y(t) = \left[I + \frac{(t-t_0)}{1!} A + \frac{(t-t_0)^2}{2!} A^2 + \ldots \right] y_0. \tag{1.1.5}$$

Этот ряд равномерно сходится на любом отрезке $\{|t - t_0| \leq T\}$.

Определение. Матричный степенной ряд

$$I + \frac{(t-t_0)}{1!} A + \frac{(t-t_0)^2}{2!} A^2 + \ldots$$

называется *матричной экспонентой* и обозначается $e^{(t-t_0)A}$.

В силу формулы (1.1.5) решение задачи Коши (1.1.4) можно записать в виде

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0.$$

Следовательно, в силу произвольности (t_0, y_0) общее решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений (1.1.1) в случае постоянной матрицы $A(t) \equiv A$ можно записать в виде

$$y(t) = e^{tA} C,$$

где $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ — произвольный вектор.

Определение. Пусть $y^1(t), y^2(t), \ldots, y^k(t)$ — непрерывные на (a, b) вектор-функции. Будем говорить, что они *линейно независимы на* (a, b), если тождество

$$\sum_{j=1}^{k} C_j y^j(t) \equiv 0, \qquad t \in (a, b),$$

выполнено тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$.

Пример 1.1.1. Вектор-функции

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad y^2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ |t| \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми на интервале $(-1, 1)$. Однако на интервале $(0, 1)$ эти вектор-функции, очевидно, линейно зависимы.

Пример 1.1.2. Вектор-функции

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad y^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми на интервале $(0, 1)$. С другой стороны, при любом фиксированном t_0 векторы $y^1(t_0)$, $y^2(t_0)$ являются линейно зависимыми.

Теорема 1.1.3. *Пусть $y^1(t), y^2(t), \dots, y^k(t)$ — решения системы уравнений (1.1.1) на интервале (a, b). Если существует $t_0 \in (a, b)$ такое, что векторы $y^1(t_0), y^2(t_0), \dots, y^k(t_0)$ линейно зависимы на (a, b), то вектор-функции $y^1(t), y^2(t), \dots, y^k(t)$ являются линейно зависимыми на (a, b).*

Теорема 1.1.4. *Множество всех решений системы (1.1.1) на интервале (a, b) образует линейное пространство размерности n.*

Определение. Совокупность линейно независимых на (a, b) решений системы уравнений (1.1.1)

$$y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t)$$

называется *фундаментальной системой решений* для (1.1.1), а матрица

$$Y(t) = (y^1(t)\ y^2(t)\ \dots\ y^n(t))$$

— *фундаментальной матрицей решений* для (1.1.1).

Из определения вытекают следующие свойства фундаментальной матрицы решений.

1. Общее решение системы (1.1.1) можно записать в виде

$$y(t) = Y(t)C,$$

где $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ — произвольный вектор.

2. В качестве фундаментальной матрицы решений $Y(t)$ можно взять решение системы

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y$$

такое, что $\det Y(t_0) \neq 0$, $t_0 \in (a, b)$.

3. Если $A(t) \equiv A$, то в качестве фундаментальной матрицы решений можно взять матричную экспоненту $Y(t) = e^{tA}$.

Теорема 1.1.5. *Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица решений для (1.1.1). Тогда решение задачи Коши (1.1.2) можно представить в виде*

$$y(t) = Y(t)(Y(t_0))^{-1}y_0.$$

Теорема 1.1.6. *Пусть $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ — фундаментальные матрицы решений для (1.1.1). Тогда существует постоянная матрица B, $\det B \neq 0$ такая, что*

$$Y_2(t) = Y_1(t)B.$$

Следствие. *Пусть $A(t) \equiv A$, J — жорданова форма матрицы A. Тогда в качестве фундаментальной матрицы решений можно взять матрицу $Y(t) = Te^{tJ}$.*

Теорема 1.1.7 (Остроградский – Лиувилль). *Пусть вектор-функции $y^1(t), y^2(t), \ldots, y^n(t)$ — решения системы (1.1.1) на интервале (a, b). Составим матрицу*

$$Y(t) = (y^1(t)\ y^2(t)\ \ldots\ y^n(t)).$$

Тогда для ее определителя имеет место тождество

$$\det Y(t) \equiv \det Y(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\xi)\, d\xi\right), \quad \operatorname{tr} A(\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(\xi).$$

§ 1.2. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений

Неоднородными системами линейных дифференциальных уравнений первого порядка называются системы следующего вида

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \qquad t \in (a,b), \tag{1.2.1}$$

где $A(t)$ — заданная матрица размера $n \times n$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^T$ — заданная вектор-функция. В дальнейшем будем предполагать, что $A(t) \in C[a,b]$, $f(t) \in C[a,b]$.

Определение. Вектор-функция

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))^T \in C^1(a,b)$$

называется *решением* системы (1.2.1), если выполнено тождество

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv A(t)y(t) + f(t), \qquad t \in (a,b).$$

Задача Коши для неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений (1.2.1) ставится аналогичным образом, как для однородных систем, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \qquad t \in (a,b), \\ y|_{t=t_0} = y_0, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

где $t_0 \in (a,b)$.

Теорема 1.2.1. *Для любых $f(t) \in C[a,b]$, $y_0 \in \mathbb{C}^n$ существует единственное решение $y(t) \in C^1(a,b)$ задачи Коши (1.2.2).*

Отметим, что решение задачи Коши (1.2.2) можно получить, используя *метод вариации произвольной постоянной.* Суть его заключается в следующем. Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица решений для однородной системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \qquad t \in (a,b).$$

Как мы знаем, общее решение этой системы имеет вид

$$y(t) = Y(t)C,$$

где C — произвольный постоянный вектор. Согласно методу вариации произвольной постоянной решение неоднородной системы (1.2.1) будем искать в аналогичном виде, только вместо вектора C возьмем вектор-функцию $C(t)$, т. е.

$$y(t) = Y(t)C(t). \tag{1.2.3}$$

Если эта вектор-функция является решением неоднородной системы (1.2.1), то должно выполняться тождество

$$\frac{d}{dt}Y(t)\,C(t) + Y(t)\,\frac{d}{dt}C(t) \equiv A(t)Y(t)C(t) + f(t), \qquad t \in (a,b).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}C(t) \equiv (Y(t))^{-1}f(t).$$

Интегрируя это тождество, имеем

$$C(t) = C(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} (Y(\tau))^{-1} f(\tau)\,d\tau.$$

Тогда, подставляя $C(t)$ в (1.2.3), получаем

$$y(t) = Y(t)C(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t)(Y(\tau))^{-1} f(\tau)\,d\tau.$$

Учитывая начальные условия в (1.2.2), будем иметь

$$Y(t_0)C(t_0) = y_0.$$

Отсюда $C(t_0) = (Y(t_0))^{-1}y_0$. Следовательно, если вектор-функция (1.2.3) является решением задачи Коши (1.2.2), то она должна иметь вид

$$y(t) = Y(t)(Y(t_0))^{-1}y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t)(Y(\tau))^{-1}f(\tau)\,d\tau.$$

Прямой подстановкой этой вектор-функции в неоднородную систему и начальные условия в (1.2.2) легко убедиться, что $y(t)$ действительно является решением задачи Коши (1.2.2).

Из проведенных рассуждений непосредственно вытекают следствия.

Следствие 1. *Если $A(t) \equiv A$, тогда решение задачи Коши (1.2.2) можно представить в виде*

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}f(\tau)\,d\tau.$$

Следствие 2. *Общее решение системы (1.2.1) можно представить в виде*

$$y(t) = Y(t)C + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t)(Y(\tau))^{-1}f(\tau)\,d\tau.$$

В следующих двух теоремах речь идет о непрерывной зависимости решения задачи Коши (1.2.2) от данных задачи.

Теорема 1.2.2. *Для решения задачи Коши (1.2.2) имеет ме-*

сто оценка

$$\|y(t)\| \le \exp\left(\left|\int\limits_{t_0}^{t} \|A(\xi)\|\, d\xi\right|\right)\|y_0\|$$

$$+\left|\int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(\left|\int\limits_{\tau}^{t} \|A(\xi)\|\, d\xi\right|\right)\|f(\tau)\|\, d\tau\right|.$$

Теорема 1.2.3. *Пусть* $t_0 \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$*, вектор-функция* $y(t)$ *— решение задачи Коши (1.2.2), вектор-функция* $\widetilde{y}(t)$ *— решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{y}}{dt} = \widetilde{A}(t)y + \widetilde{f}(t), \qquad t \in (a, b), \\ \widetilde{y}|_{t=t_0} = \widetilde{y}_0, \end{cases}$$

где $\widetilde{A}(t) \in C[a, b]$*,* $\widetilde{f}(t) \in C[a, b]$*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta_\varepsilon > 0$ *такое, что если* $\widetilde{A}(t)$*,* $\widetilde{f}(t)$*,* $\widetilde{y}_0$ *удовлетворяют неравенству*

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]} \|A(t) - \widetilde{A}(t)\| + \max_{t\in[\alpha,\beta]} \|f(t) - \widetilde{f}(t)\| + \|y_0 - \widetilde{y}_0\| \le \delta_\varepsilon,$$

то для разности решений имеет место оценка

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]} \|y(t) - \widetilde{y}(t)\| \le \varepsilon.$$

Следствие. *Матричная экспонента* e^{tA} *непрерывно зависит от элементов матрицы* A *(см. также с. 29).*

§ 1.3. Линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка

В этом параграфе мы будем рассматривать линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка на интервале (a, b):

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{du}{dt} + a_n(t)u = \varphi(t), \qquad (1.3.1)$$

где $a_1(t), \dots, a_n(t)$, $\varphi(t)$ — заданные непрерывные функции на отрезке $[a, b]$. В случае, когда $\varphi(t) \equiv 0$, уравнение (1.3.1) называется *однородным* дифференциальным уравнением; если же $\varphi(t) \not\equiv 0$, то *неоднородным.*

Для сокращения записи уравнения (1.3.1) введем следующий дифференциальный оператор:

$$P_n\left(t, \frac{d}{dt}\right) = \frac{d^n}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{d}{dt} + a_n(t)I.$$

Тогда уравнение (1.3.1) может быть записано в виде

$$P_n\left(t, \frac{d}{dt}\right)u = \varphi(t).$$

Определение. Функция $u(t) \in C^n(a, b)$ называется *решением* уравнения (1.3.1), если выполнено тождество

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{du(t)}{dt} + a_n(t)u(t) \equiv \varphi(t).$$

Между решениями дифференциального уравнения (1.3.1) и решениями следующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

существует взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-2)}(t) \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Поэтому при изучении свойств решений уравнения (1.3.1) можно воспользоваться результатами из предыдущего параграфа.

Вначале рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{du}{dt} + a_n(t)u = 0, \quad t \in (a,b). \quad (1.3.2)$$

Теорема 1.3.1. *Множество всех решений уравнения (1.3.2) на интервале (a,b) образует линейное пространство. Размерность его равна n.*

Определение. Совокупность линейно независимых на (a,b) решений уравнения (1.3.2)

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$$

называется *фундаментальной системой решений* для (1.3.2).

Следствие. *Пусть $u_1(t)$, $u_2(t), \ldots, u_n(t)$ — фундаментальная система решений для (1.3.2). Тогда общее решение уравнения*

(1.3.2) можно записать в виде

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(t),$$

где c_j — произвольные константы, $j = 1, \ldots, n$.

Определение. Пусть $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$ — фундаментальная система решений для (1.3.2). Матрица

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

называется *фундаментальной матрицей решений* для (1.3.2).

Определение. Пусть $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ — некоторые решения уравнения (1.3.2). Функция

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

называется *определителем Вронского* для (1.3.2).

Теорема 1.3.2. *Решения $u_1(t)$, $u_2(t), \dots, u_n(t)$ уравнения (1.3.2) образуют фундаментальную систему решений тогда и только тогда, когда $W(t_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке $t_0 \in (a, b)$.*

Теорема 1.3.3 (Остроградский – Лиувилль). *Пусть функции $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ — решения уравнения (1.3.2) на интервале (a, b). Тогда для любого $t_0 \in (a, b)$ имеет место тождество*

$$W(t) \equiv W(t_0) \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(\xi)\, d\xi \right).$$

Пусть заданы $t_0 \in (a, b)$, $(u^0, u^1, \dots, u^{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$. Задача о нахождении решения $u(t)$ однородного уравнения (1.3.2) такого, что

$$\begin{aligned}
&u|_{t=t_0} = u^0,\\
&\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0} = u^1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\left.\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0} = u^{n-1},
\end{aligned}$$

называется *задачей Коши*, т. е. постановка задачи Коши имеет вид

$$\begin{cases}
P_n\left(t, \dfrac{d}{dt}\right)u = 0, \qquad t \in (a,b),\\
u|_{t=t_0} = u^0,\\
\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_0} = u^1,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left.\dfrac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0} = u^{n-1}.
\end{cases} \tag{1.3.3}$$

Теорема 1.3.4. *При любых* $t_0 \in (a,b)$, $(u^0, u^1, \dots, u^{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$ *существует единственное решение* $u(t) \in C^n(a,b)$ *задачи Коши (1.3.3).*

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1.3.1).

Теорема 1.3.5. *Пусть* $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ *— фундаментальная система решений для (1.3.2), функция* $u_{\text{част}}(t)$ *— частное решение неоднородного уравнения (1.3.1). Тогда общее решение уравнения (1.3.1) можно записать в виде*

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(t) + u_{\text{част}}(t),$$

где c_j *— произвольные константы.*

Отметим, что имея фундаментальную систему решений $u_1(t)$, $u_2(t)$, …, $u_n(t)$ уравнения (1.3.2), можно найти частное решение $u_{\text{част}}(t)$. Для этого, как и в § 1.2, можно применить метод вариации произвольных постоянных. А именно, будем искать частное решение неоднородного уравнения (1.3.1) в виде

$$u_{\text{част}}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) u_j(t), \tag{1.3.4}$$

где $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ — неизвестные гладкие функции. Прежде чем подставлять выражение (1.3.4) в уравнение (1.3.1), вычислим последовательно все производные $\dfrac{d^k}{dt^k} u_{\text{част}}(t)$, $k = 1, \dots, n$, налагая при этом некоторые требования на производные коэффициентов $c_j(t)$, $j = 1, \dots, n$. Очевидно,

$$\frac{d}{dt} u_{\text{част}}(t) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j(t) u_j'(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j'(t) u_j(t).$$

Будем предполагать, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t) u_j(t) \equiv 0.$$

Тогда для производной второго порядка получим

$$\frac{d^2}{dt^2} u_{\text{част}}(t) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j(t) u_j''(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j'(t) u_j'(t).$$

Будем считать, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t) u_j'(t) \equiv 0.$$

Рассуждая аналогичным образом при вычислении производных до порядка $n-1$ включительно, получим

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u_{\text{част}}(t) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j(t) u_j^{(n-1)}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j'(t) u_j^{(n-2)}(t)$$

и вновь будем требовать, чтобы

$$\sum_{j=1}^{n} c'_j(t) u_j^{(n-2)}(t) \equiv 0.$$

Итак, с учетом указанных условий на производные $c'_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, будем иметь

$$\frac{d^k}{dt^k} u_{\text{част}}(t) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j(t) u_j^{(k)}(t),$$

$$\sum_{j=1}^{n} c'_j(t) u_j^{(k-1)}(t) \equiv 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда

$$\frac{d^n}{dt^n} u_{\text{част}}(t) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j(t) u_j^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} c'_j(t) u_j^{(n-1)}(t).$$

Поэтому, учитывая, что функция $u_{\text{част}}(t)$ должна быть решением уравнения (1.3.1), а функции $u_j(t)$ — решением уравнения (1.3.2), получим

$$P_n\left(t, \frac{d}{dt}\right) u_{\text{част}}(t) \equiv \sum_{j=1}^{n} c'_j(t) u_j^{(n-1)}(t) \equiv \varphi(t).$$

Следовательно, нахождение частного решения неоднородного дифференциального уравнения (1.3.1) в виде (1.3.4) сводится к решению системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \ldots & u_n(t) \\ u'_1(t) & u'_2(t) & \ldots & u'_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \ldots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \\ \vdots \\ c'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Эта система однозначно разрешима при любом $t \in (a, b)$, поскольку определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке из (a,b). Отсюда находим

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(t_0) \\ c_2(t_0) \\ \vdots \\ c_n(t_0) \end{pmatrix} + \int\limits_{t_0}^{t} U^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \quad t_0,\ t \in (a,b).$$

Можно положить, например, $c_1(t_0) = \dots = c_n(t_0) = 0$ (см. следствие 2 ниже).

Задача Коши для неоднородного уравнения (1.3.1) ставится аналогичным образом, как для однородного уравнения (1.3.2), т. е.

$$\begin{cases} P_n\left(t, \dfrac{d}{dt}\right) u = \varphi(t), \qquad t \in (a,b), \\ u|_{t=t_0} = u^0, \\ \left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_0} = u^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \left.\dfrac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0} = u^{n-1}, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

где $t_0 \in (a,b)$.

Теорема 1.3.6. *Для любых $\varphi(t) \in C[a,b]$, $(u^0, u^1, \dots, u^{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$ существует единственное решение $u(t) \in C^n(a,b)$ задачи Коши (1.3.5).*

Следствие 1. *Решение задачи Коши (1.3.5) непрерывно зависит от коэффициентов уравнения $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$, правой части уравнения $\varphi(t)$ и начальных данных u^0, $u^1, \dots, u^{n-1}$.*

Следствие 2. *В качестве частного решения $u_{\text{част}}(t)$ неодно-*

родного уравнения (1.3.1) можно взять решение задачи Коши

$$\begin{cases} P_n\left(t, \dfrac{d}{dt}\right) u = \varphi(t), \qquad t \in (a,b), \\ u\big|_{t=t_0} = 0, \\ \left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \left.\dfrac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0} = 0, \end{cases}$$

которое имеет вид

$$u_{\text{част}}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} k(t,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Функция $k(t,\xi)$ *является последним элементом первой строки матрицы* $U(t)(U(\xi))^{-1}$, *где* $U(t)$ *— фундаментальная матрица решений для (1.3.2).*

Упражнение. Доказать, что *уравнение Эйлера*

$$t^n \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 t^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} t \frac{dy}{dt} + a_n y = \varphi(t), \qquad t > 0,$$

заменой переменной $s = e^t$ сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds} - I\right)\dots\left(\frac{d}{ds} - (n-1)I\right)\widetilde{y}$$

$$+ a_1\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds} - I\right)\dots\left(\frac{d}{ds} - (n-2)I\right)\widetilde{y} + \dots + a_n\widetilde{y} = \varphi(\ln s).$$

§ 1.4. Фундаментальная система решений для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы будем рассматривать линейные однородные дифференциальные уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{du}{dt} + a_n u = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.4.1}$$

Определение. Полином

$$P_n(\tau) = \tau^n + a_1 \tau^{n-1} + \dots + a_{n-1}\tau + a_n \tag{1.4.2}$$

называется *характеристическим полиномом* для дифференциального уравнения (1.4.1).

Введем следующий дифференциальный оператор

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n I.$$

Тогда уравнение (1.4.1) может быть записано в виде

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) u = 0.$$

Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ — корни полинома (1.4.2). Тогда

$$P_n(\tau) = (\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)\dots(\tau - \tau_n).$$

Нетрудно показать, что для оператора $P_n\left(\dfrac{d}{dt}\right)$ имеет место представление

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} - \tau_1 I\right)\left(\frac{d}{dt} - \tau_2 I\right)\dots\left(\frac{d}{dt} - \tau_n I\right). \tag{1.4.3}$$

Введем следующие дифференциальные операторы:

$$P_1\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt} - \tau_1 I,$$
$$P_2\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} - \tau_1 I\right)\left(\frac{d}{dt} - \tau_2 I\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_j\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} - \tau_1 I\right)\left(\frac{d}{dt} - \tau_2 I\right)\dots\left(\frac{d}{dt} - \tau_j I\right), \qquad j = 3, \dots, n.$$

Рассмотрим серию задач Коши

$$\begin{cases} P_1\left(\dfrac{d}{dt}\right) u_1 = 0, \\ u_1\big|_{t=0} = 1, \end{cases} \tag{$1.4.4_1$}$$

$$\begin{cases} P_2\left(\dfrac{d}{dt}\right) u_2 = 0, \\ u_2\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{du_2}{dt}\right|_{t=0} = 1, \end{cases} \tag{$1.4.4_2$}$$

$$\begin{cases} P_j\left(\dfrac{d}{dt}\right) u_j = 0, \\ u_j\big|_{t=0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \left.\dfrac{d^{j-2}u_j}{dt^{j-2}}\right|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{d^{j-1}u_j}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} = 1. \end{cases} \qquad j = 3, \dots, n, \tag{$1.4.4_j$}$$

Каждая из задач Коши $(1.4.4_j)$ имеет единственное решение $u_j(t)$. Поскольку имеет место представление

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} - \tau_n I\right)\dots\left(\frac{d}{dt} - \tau_{j+1} I\right) P_j\left(\frac{d}{dt}\right),$$

то каждая функция $u_j(t)$ удовлетворяет уравнению (1.4.1). Покажем, что функции $u_1(t)$, $u_2(t), \ldots, u_n(t)$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (1.4.1).

Рассмотрим следующую матрицу

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \ldots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \ldots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \ldots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы Остроградского – Лиувилля (см. предыдущий параграф) имеет место тождество

$$\det U(t) = \det U(0) e^{-a_1 t}.$$

В нашем случае

$$U(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\det U(0) = 1.$$

Тогда $\det U(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, функции $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\ldots$, $u_n(t)$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (1.4.1).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &u_1(t) = \psi(t, \tau_1), \\ &u_2(t) = \psi(t, \tau_1, \tau_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_n(t) = \psi(t, \tau_1, \ldots, \tau_n). \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Укажем свойства введенной системы ψ-функций. (Докажите их в качестве упражнений.)

Свойство 1. Функции $\psi(t, \tau_1, \ldots, \tau_j)$, $j = 1, \ldots, n$, являются непрерывными по совокупности переменных t, $\tau_1, \ldots, \tau_j$.

Свойство 2. Имеет место тождество

$$\psi(t, \tau_1, \ldots, \tau_j) \equiv \psi(t, \tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_j}),$$

где $i_1, \ldots, i_j$ — перестановка $1, \ldots, j$.

Свойство 3. Вектор-функция $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{dt} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \tau_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \tau_n \end{pmatrix} \psi, \\ \psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &\psi_1(t) = \psi(t, \tau_1), \\ &\psi_2(t) = \psi(t, \tau_1, \tau_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\psi_n(t) = \psi(t, \tau_1, \ldots, \tau_n). \end{aligned}$$

Свойство 4. Имеют место соотношения

$$\psi(t,\tau_1) = e^{\tau_1 t},$$

$$\psi(t,\tau_1,\ldots,\tau_j) = \int\limits_0^t e^{\tau_j(t-s)}\psi(s,\tau_1,\ldots,\tau_{j-1})\,ds, \tag{1.4.6}$$

$$j = 2,\ldots,n.$$

Свойство 5. Пусть $\tau_1 = \cdots = \tau_k$. Тогда имеют место представления

$$\psi(t,\tau_1,\ldots,\tau_j) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\tau_j t}, \qquad j = 1,\ldots,k.$$

Свойство 6. Пусть $\tau_i \neq \tau_j$, $i,j = 1,\ldots,n$. Тогда имеют место представления

$$\psi(t,\tau_1,\ldots,\tau_j) = \sum_{l=1}^{j} A_{jl}e^{\tau_l t}, \qquad j = 2,\ldots,n,$$

где

$$A_{jl} = \frac{1}{\prod\limits_{k=1,\ l\neq k}^{j}(\tau_l - \tau_k)}.$$

Свойство 7. Пусть $\tau_{j-1} \neq \tau_j$. Тогда имеют место тождества

$$\psi(t,\tau_1,\ldots,\tau_{j-1},\tau_j)$$

$$\equiv \frac{1}{\tau_j - \tau_{j-1}}\left[\psi(t,\tau_1,\ldots,\tau_{j-2},\tau_j) - \psi(t,\tau_1,\ldots,\tau_{j-2},\tau_{j-1})\right],$$

$$j = 3,\ldots,n.$$

Теорема 1.4.1. *Представим характеристический полином (1.4.2) в виде*

$$P_n(\tau) = P_{n_1}(\tau)\ldots P_{n_k}(\tau), \qquad n_1 + \cdots + n_k = n,$$

где $P_{n_j}(\tau)$ — взаимно простые полиномы порядка n_j, $j = 1, \ldots, k$. Пусть M_j — фундаментальная система решений для уравнения

$$P_{n_j}\left(\frac{d}{dt}\right) v = 0.$$

Тогда

$$M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$$

— фундаментальная система решений для уравнения (1.4.1).

Следствие. *Пусть τ_j, $j = 1, \ldots, k$, — корни характеристического полинома (1.4.2), имеющие кратность n_j, $n_1 + \cdots + n_k = n$. Пусть*

$$M_j = \left\{e^{\tau_j t}, te^{\tau_j t}, \ldots, t^{n_j - 1} e^{\tau_j t}\right\}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$$

— фундаментальная система решений для уравнения (1.4.1).

Следствие непосредственно вытекает из теоремы 1.4.1, поскольку в качестве взаимно простых полиномов можно взять $P_{n_j}(\tau) = (\tau - \tau_j)^{n_j}$, и в силу свойства 5 набор функций

$$\widetilde{M}_j = \left\{e^{\tau_j t}, \frac{t}{1!} e^{\tau_j t}, \ldots, \frac{t^{n_j - 1}}{(n_j - 1)!} e^{\tau_j t}\right\}$$

является фундаментальной системой решений для уравнения $P_{n_j}\left(\frac{d}{dt}\right) v = 0$.

Упражнение. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) u = \varphi(t), \tag{1.4.7}$$

где $\varphi(t) \in C(\mathbb{R})$. Показать, что в качестве частного решения этого уравнения можно взять функцию

$$u_{\text{част}}(t) = \int\limits_0^t \psi(t-s, \tau_1, \dots, \tau_n)\varphi(s)\, ds.$$

Из упражнения следует, что систему ψ-функций (1.4.5) можно использовать для нахождения частного решения неоднородного уравнения (1.4.7). (Не нужно использовать метод вариации произвольных постоянных!)

Замечание. Для более детального изучения свойств системы ψ-функций см. [3, 4].

§ 1.5. Свойства матричной экспоненты

Пусть A — постоянная матрица размера $n \times n$. В первом параграфе мы определили матричную экспоненту как следующий степенной ряд

$$e^{tA} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^j}{j!}A^j + \dots.$$

Из результатов этого же параграфа вытекает, что матричную экспоненту можно определить как решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = AY, \\ Y|_{t=0} = I. \end{cases}$$

Одним из способов получения компактных представлений матричной экспоненты является использование жордановой формы матрицы. Действительно, пусть T — невырожденная матрица такая, что

$$T^{-1}AT = J,$$

где J — жорданова форма матрицы A. Тогда

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}.$$

Приведем еще два представления матричной экспоненты.

Теорема 1.5.1. *Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — собственные значения матрицы A. Тогда имеет место представление*

$$e^{tA} = \psi(t, \tau_1)I + \psi(t, \tau_1, \tau_2)(A - \tau_1 I)$$

$$+ \cdots + \psi(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)(A - \tau_1 I) \ldots (A - \tau_{n-1} I),$$

где функции $\psi(t, \tau_1, \ldots, \tau_j)$, $j = 1, \ldots, n$, определены в (1.4.6).

Теорема 1.5.2. *Пусть γ — контур в комплексной плоскости, охватывающий все собственные значения матрицы A. Тогда справедливо представление*

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

Укажем некоторые свойства матричной экспоненты.

Свойство 1. Матричная экспонента e^{tA} и матрица A коммутативны

$$e^{tA}A = Ae^{tA}.$$

Свойство 2. Если матрицы A и B коммутативны, то

$$Ae^{tB} = e^{tB}A, \qquad Be^{tA} = e^{tA}B,$$

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}.$$

Упражнение. Пусть матрицы A и B такие, что

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}.$$

Доказать, что $AB = BA$.

Свойство 3. Имеет место равенство

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

Свойство 4. Для определителя матричной экспоненты справедлива формула

$$\det e^{tA} = e^{t\operatorname{tr} A}.$$

Свойство 5. Имеет место тождество

$$e^{tA_1} - e^{tA_2} \equiv \int\limits_0^t e^{(t-s)A_1}(A_1 - A_2)e^{sA_2}ds.$$

Из свойства 5 вытекает следующая оценка:

$$\left\|e^{tA_1} - e^{tA_2}\right\| \le \psi(t, \|A_2\|, \|A_1\|)\, \|A_1 - A_2\|, \qquad t > 0.$$

Приведем некоторые оценки для нормы матричной экспоненты.

Теорема 1.5.3. *Имеет место неравенство*

$$e^{-|t|\|A\|} \le \|e^{tA}\| \le e^{|t|\|A\|}.$$

Теорема 1.5.4 (Гельфанд – Шилов). *Пусть* $\tau_1, \dots, \tau_n$ — *собственные значения матрицы* A, *причем* $\operatorname{Re}\tau_j \le \delta$, $j = 1, \dots, n$. *Тогда при* $t \ge 0$ *имеет место неравенство*

$$\left\|e^{tA}\right\| \le e^{\delta t}\left(1 + \frac{2t\|A\|}{1!} + \frac{(2t\|A\|)^2}{2!} + \dots + \frac{(2t\|A\|)^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

ГЛАВА 2.
Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений

В этой главе мы будем рассматривать краевые задачи для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка и линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка на всей числовой прямой, на полупрямой $\{t \geq 0\}$ и на ограниченном интервале.

§ 2.1. Краевые задачи на числовой прямой

Пусть A — постоянная матрица размера $n \times n$. Рассмотрим задачу о нахождении ограниченных вектор-функций $y(t)$, которые являются решениями системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

т. е. рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \\ \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|y(t)\| < \infty. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Будем предполагать, что $f(t)$ ограничена и непрерывна на всей числовой прямой и матрица A не имеет собственных значений на мнимой оси. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для собственных значений τ_j, $j = 1, \ldots, n$, матрицы A имеет место оценка

$$|\mathrm{Re}\, \tau_j| \geq \delta, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

При этих предположениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1.1. *Существует единственное решение* $y(t) \in C^1(\mathbb{R})$ *краевой задачи (2.1.1), причем*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|y(t)\| \le c \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|,$$

где $c > 0$ *— константа, не зависящая от* $f(t)$.

Теорема 2.1.2. *Решение краевой задачи (2.1.1) можно представить в виде*

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)\,ds, \tag{2.1.2}$$

где матрица $G(t)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\dfrac{d}{dt}G(t) \equiv AG(t), \qquad t \ne 0;$

2) $G(t)$ *непрерывна всюду, кроме* $t = 0$, *где она имеет разрыв первого рода*

$$G(+0) - G(-0) = I;$$

3) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|G(t)\| < \infty.$

Определение. Матрица $G(t)$, для которой выполнены условия 1)–3), называется *матрицей Грина* краевой задачи (2.1.1).

Упражнение 1. Показать, что матрица Грина краевой задачи (2.1.1) определяется условиями 1)–3) единственным образом.

Рассмотрим теперь задачу о нахождении функций $u(t)$, которые являются решениями линейного дифференциального уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{du}{dt} + a_n u = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

и ограничены на всей прямой; т. е. рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} P_n\left(\dfrac{d}{dt}\right)u = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\| < \infty, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

где

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n I.$$

Будем предполагать, что $\varphi(t)$ ограничена и непрерывна на всей числовой прямой и характеристический полином $P_n(\tau)$ не имеет корней на мнимой оси. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для корней τ_j, $j = 1, \dots, n$, полинома $P_n(\tau)$ имеет место оценка

$$|\mathrm{Re}\,\tau_j| \geq \delta, \qquad j = 1, \dots, n.$$

При этих предположениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1.3. *Существует единственное решение $u(t) \in C^n(\mathbb{R})$ краевой задачи (2.1.3), причем*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)| \leq c \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|,$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $\varphi(t)$.

Теорема 2.1.4. *Решение краевой задачи (2.1.3) можно представить в виде*

$$u(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\varphi(s)\,ds,$$

где функция $g(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$1^0)$ $P_n\left(\dfrac{d}{dt}\right)g(t) \equiv 0, \qquad t \neq 0;$

2^0) *$g(t) \in C^{n-2}(\mathbb{R})$, причем $g^{(n-1)}(t)$ непрерывна всюду, кроме $t = 0$, где она имеет разрыв первого рода, т. е.*

$$
\begin{aligned}
&g(+0) - g(-0) = 0, \\
&g'(+0) - g'(-0) = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&g^{(n-2)}(+0) - g^{(n-2)}(-0) = 0, \\
&g^{(n-1)}(+0) - g^{(n-1)}(-0) = 1;
\end{aligned}
$$

3^0) $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| < \infty$.

Определение. Функция $g(t)$, для которой выполнены условия 1^0)–3^0), называется *функцией Грина* краевой задачи (2.1.3).

Упражнение 2. Показать, что функция Грина краевой задачи (2.1.3) определяется условиями 1^0)–3^0) единственным образом.

§ 2.2. Краевые задачи на полупрямой

Рассмотрим на полупрямой $\{t \geq 0\}$ краевую задачу для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dt} = Ay + f(t), \qquad t > 0, \\
By|_{t=0} = \varphi, \\
\sup\limits_{t \geq 0} \|y(t)\| < \infty.
\end{cases} \tag{2.2.1}
$$

Будем предполагать, что $f(t)$ ограничена и непрерывна при $t \geq 0$, матрица A размера $n \times n$ не имеет собственных значений на мнимой оси, т. е. $|\mathrm{Re}\, \tau_j| \geq \delta > 0$, $j = 1, \dots, n$; B — постоянная прямоугольная матрица размера $m \times n$, $m \leq n$, вектор φ имеет m компонент.

Обсудим, каким условиям должна удовлетворять матрица B, чтобы краевая задача (2.2.1) имела единственное решение $y(t)$ при любых заданных $f(t)$ и φ.

Заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением однородной системы, т. е. при $f(t) \equiv 0$. Действительно, продолжим вектор-функцию $f(t)$ на отрицательную полуось так, чтобы полученная вектор-функция $\bar{f}(t)$ была ограниченной и непрерывной при $t \in \mathbb{R}$; например,

$$\bar{f}(t) = f(|t|).$$

Тогда, как мы знаем из предыдущего параграфа, существует единственное решение $x(t)$ краевой задачи на числовой прямой

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + \bar{f}(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| < \infty, \end{cases}$$

причем

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\bar{f}(s)\,ds,$$

где $G(t)$ — матрица Грина. Следовательно, решение задачи (2.2.1) можно искать в виде

$$y(t) = x(t) + z(t),$$

где вектор-функция $z(t)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = Az, \qquad t > 0, \\ Bz|_{t=0} = \psi, \\ \sup\limits_{t\geq 0} \|z(t)\| < \infty, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

где

$$\psi = \varphi - \int\limits_{-\infty}^{\infty} BG(-s)\bar{f}(s)\,ds.$$

Очевидно, краевая задача (2.2.1) однозначно разрешима при любых $f(t)$ и φ тогда и только тогда, когда краевая задача (2.2.2) имеет единственное решение $z(t)$ при любом векторе ψ. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать задачу (2.2.1) при $f(t) \equiv 0$.

Пусть n_+ — число собственных значений матрицы A таких, что $\operatorname{Re} \tau_j \geq \delta$, n_- — число собственных значений матрицы A таких, что $\operatorname{Re} \tau_j \leq -\delta$. Пусть T — невырожденная матрица такая, что

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix},$$

где A_+ — матрица размера $n_+ \times n_+$, все собственные значения которой лежат в правой полуплоскости, A_- — матрица размера $n_- \times n_-$, все собственные значения которой лежат в левой полуплоскости. Ясно, что матрица T определена неоднозначно. Обозначим через T_+ первые n_+ столбцов матрицы T, а через T_- — последние n_- столбцов матрицы T, т. е.

$$T = (T_+ T_-).$$

Поскольку матрица T невырождена и

$$AT = T \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix},$$

то столбцы матрицы T_- образуют базис в некотором подпространстве $\mathfrak{M}_-$, инвариантном относительно преобразования A. Очевидно, что в качестве базиса в $\mathfrak{M}_-$ можно взять собственные и присоединенные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям τ_j таким, что $\operatorname{Re} \tau_j \leq -\delta$.

Теорема 2.2.1. *Решение $y(t)$ однородной системы*

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{2.2.3}$$

будет ограниченным на полупрямой $\{t \geq 0\}$ тогда и только тогда, когда $y(0) \in \mathfrak{M}_-$.

Из теоремы следует, что общее решение однородной системы (2.2.3), ограниченное при всех $t \geq 0$, имеет вид

$$y(t) = T_{-}e^{tA_{-}}C,$$

где $C = (C_1, \ldots, C_{n_-})^T$ — постоянный вектор. Следовательно, для однозначной разрешимости краевой задачи (2.2.1) при любом векторе φ (напомним, что $f(t) \equiv 0$) необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$By|_{t=0} = BT_{-}C = \varphi$$

имела единственное решение C при любом φ. Отсюда получаем условия на матрицу B:

1) число строк матрицы B равно n_-;

2) $\det(BT_-) \neq 0$.

Определение. Если для матрицы B выполнены условия 1) и 2), то B удовлетворяет *условию Лопатинского.*

Итак, если матрица B удовлетворяет условию Лопатинского, то краевая задача (2.2.1) при $f(t) \equiv 0$ и любом векторе φ имеет единственное решение

$$y(t) = T_{-}e^{tA_{-}}(BT_{-})^{-1}\varphi.$$

Применяя неравенство Гельфанда – Шилова (см. § 1.5), получаем оценку

$$\|y(t)\| \leq ce^{-\frac{\delta t}{2}}\|\varphi\|, \qquad t \geq 0,$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от φ.

Ранее мы отмечали, что вопрос об однозначной разрешимости краевой задачи (2.2.1) при любых заданных $f(t)$ и φ сводится к изучению этой задачи при $f(t) \equiv 0$. Следовательно, из предыдущего вытекает, что задача (2.2.1) имеет единственное решение при любой непрерывной ограниченной вектор-функции $f(t)$ и любом векторе φ тогда и только тогда, когда матрица B удовлетворяет условию Лопатинского.

Замечание 1. Если все собственные значения матрицы A лежат в левой полуплоскости, то условие Лопатинского означает, что матрица B имеет размер $n \times n$ и $\det B \neq 0$.

Замечание 2. В формулировке условия Лопатинского фигурирует матрица T_-, столбцы которой образуют базис в подпространстве $\mathfrak{M}_-$. Но поскольку для любой другой матрицы $\widetilde{T}_-$, столбцы которой образуют базис в $\mathfrak{M}_-$, существует невырожденная матрица Π размера $n_- \times n_-$ такая, что $\widetilde{T}_- = T_-\Pi$, то условие $\det(BT_-) \neq 0$ не зависит от выбора базиса в $\mathfrak{M}_-$. Следовательно, при решении конкретной задачи в качестве столбцов матрицы T_- можно взять собственные и присоединенные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям τ_j таким, что $\operatorname{Re}\tau_j \leq -\delta$.

Упражнение. Определить, при каких параметрах α и β выполнено условие Лопатинского для краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad t > 0, \\ \alpha y_1 + \beta y_2|_{t=0} = \varphi, \\ \sup\limits_{t\geq 0} \|y(t)\| < \infty, \end{cases}$$

и выписать решение.

§ 2.3. Краевые задачи на ограниченном интервале

Рассмотрим на ограниченном интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ краевую задачу для систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \qquad t \in (a, b), \\ \mathcal{L}y|_{t=a} + \mathcal{R}y|_{t=b} = \varphi. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Будем предполагать, что $A(t)$ — матрица размера $n \times n$, элементы которой принадлежат классу $C[a,b]$, $f(t) \in C[a,b]$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ — постоянные матрицы размера $n \times n$, φ — постоянный вектор.

Определение. Краевая задача (2.3.1) называется *однородной*, если $f(t) \equiv 0$ и $\varphi = 0$.

Ниже мы сформулируем теорему, которая дает необходимое и достаточное условие существования и единственности решения

$$y(t) \in C^1(a,b) \cap C[a,b]$$

краевой задачи (2.3.1) при любых данных $f(t) \in C[a,b]$ и φ.

Теорема 2.3.1. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *однородная краевая задача (2.3.1) имеет только тривиальное решение* $y(t) \equiv 0$*;*

2) *краевая задача (2.3.1) разрешима при любых* $f(t) \in C[a,b]$ *и* φ*;*

3) *определитель* $\Delta = \det(\mathcal{L}Y(a) + \mathcal{R}Y(b))$ *не равен нулю, где* $Y(t)$ *— фундаментальная матрица решений для системы* $\dfrac{dy}{dt} = A(t)y$.

Следствие. *Краевая задача (2.3.1) однозначно разрешима при любых* $f(t) \in C[a,b]$ *и* φ *тогда и только тогда, когда* $\Delta \neq 0$*, при этом решение имеет вид*

$$y(t) = Y(t)(\mathcal{L}Y(a) + \mathcal{R}Y(b))^{-1}(\varphi - \mathcal{R}g) + \int\limits_a^t Y(t)(Y(\tau))^{-1} f(\tau)\, d\tau, \qquad (2.3.2)$$

где

$$g = \int\limits_a^b Y(b)(Y(\tau))^{-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Замечание 1. Условие однозначной разрешимости:

$$\Delta = \det(\mathcal{L}Y(a) + \mathcal{R}Y(b)) \neq 0 \tag{2.3.3}$$

не зависит от выбора фундаментальной матрицы решений $Y(t)$.

Замечание 2. Если $\Delta = 0$, то краевая задача (2.3.1) разрешима не при любых $f(t)$ и φ. Но если при заданных $f(t)$ и φ решение краевой задачи (2.3.1) существует, то оно определено не однозначно.

Замечание 3. Во многих учебниках рассматриваются краевые задачи вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \qquad t \in (a,b), \\ Ly|_{t=a} = \varphi, \\ Ry|_{t=b} = \psi, \end{cases}$$

где L — постоянная матрица размера $l \times n$, R — постоянная матрица размера $r \times n$, причем $l + r = n$. Очевидно, такие задачи входят в класс краевых задач вида (2.3.1).

Упражнение 1. Показать, что краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi^2 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in (0,1), \\ y_1(0) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^1 f(t)\sin(\pi t)\,dt = 0.$$

Рассмотрим теперь на интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$ краевую задачу для линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} P_n\left(t, \dfrac{d}{dt}\right) u = h(t), \qquad t \in (a, b), \\ \mathcal{L}\vec{u}|_{t=a} + \mathcal{R}\vec{u}|_{t=b} = \varphi, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

где

$$P_n\left(t, \frac{d}{dt}\right) = \frac{d^n}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{d}{dt} + a_n(t)I,$$

$a_j(t) \in C[a, b]$, $j = 1, \dots, n$, $h(t) \in C[a, b]$,

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix},$$

$\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ — постоянные матрицы размера $n \times n$.

Определение. Краевая задача (2.3.4) называется *однородной*, если $h(t) \equiv 0$, $\varphi_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Решение краевой задачи (2.3.4) естественно искать в классе функций $C^n(a, b) \cap C^{n-1}[a, b]$. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи (2.3.4) при любых данных $h(t) \in C[a, b]$ и φ.

Теорема 2.3.2. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *однородная краевая задача (2.3.4) имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$*;*

2) *краевая задача (2.3.4) разрешима при любых* $h(t) \in C[a, b]$, φ_i, $i = 1, \dots, n$*;*

3) *определитель* $\widetilde{\Delta} = \det(\mathcal{L}U(a) + \mathcal{R}U(b))$ *не равен нулю, где* $U(t)$ *— фундаментальная матрица решений для уравнения* $P_n\left(t, \dfrac{d}{dt}\right) u = 0$.

Замечание 4. Условие однозначной разрешимости: $\widetilde{\Delta} \neq 0$ не зависит от выбора фундаментальной матрицы решений $U(t)$.

Вернемся теперь к краевой задаче (2.3.1) для системы дифференциальных уравнений. Предположим, что условие однозначной разрешимости (2.3.3) выполнено. Тогда, как отмечалось выше, решение краевой задачи (2.3.1) может быть записано в виде (2.3.2). В частности, при $\varphi = 0$ оно имеет вид

$$y(t) = -Y(t)(\mathcal{L}Y(a) + \mathcal{R}Y(b))^{-1}\mathcal{R}g$$
$$+ \int\limits_a^t Y(t)(Y(\tau))^{-1} f(\tau)\, d\tau. \tag{2.3.5}$$

Поскольку

$$g = \int\limits_a^b Y(b)(Y(\tau))^{-1} f(\tau)\, d\tau,$$

перепишем формулу (2.3.5) следующим образом:

$$y(t) = Y(t)(\mathcal{L}Y(a) + \mathcal{R}Y(b))^{-1}$$
$$\times \Bigg[(\mathcal{L}Y(a) + \mathcal{R}Y(b)) \int\limits_a^t (Y(\tau))^{-1} f(\tau)\, d\tau - \mathcal{R}Y(b) \int\limits_a^b (Y(\tau))^{-1} f(\tau)\, d\tau\Bigg]$$
$$= Y(t)(\mathcal{L}Y(a) + \mathcal{R}Y(b))^{-1}$$
$$\times \Bigg[\mathcal{L}Y(a) \int\limits_a^t (Y(\tau))^{-1} f(\tau)\, d\tau - \mathcal{R}Y(b) \int\limits_t^b (Y(\tau))^{-1} f(\tau)\, d\tau\Bigg].$$

Рассмотрим матрицу

$$G(t,\tau) = \begin{cases} Y(t)(\mathcal{L}Y(a) + \mathcal{R}Y(b))^{-1}\mathcal{L}Y(a)(Y(\tau))^{-1}, & a < \tau < t, \\ -Y(t)(\mathcal{L}Y(a) + \mathcal{R}Y(b))^{-1}\mathcal{R}Y(b)(Y(\tau))^{-1}, & t < \tau < b. \end{cases}$$

Очевидно, используя эту матрицу, формулу (2.3.5) можно переписать в виде

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Из определения вытекает, что матрица $G(t,\tau)$ обладает следующими свойствами:

1) при $t \neq \tau$ имеет место тождество $\dfrac{d}{dt} G(t,\tau) \equiv A(t) G(t,\tau)$;

2) матрица $G(t,\tau)$ имеет "скачок" на диагонали квадрата $(a,b) \times (a,b)$:

$$G(\tau+0,\tau) - G(\tau-0,\tau) = I;$$

3) матрица $G(t,\tau)$ удовлетворяет граничному условию

$$\mathcal{L} G(a,\tau) + \mathcal{R} G(b,\tau) = 0, \qquad \tau \in (a,b).$$

Определение. Матрица $G(t,\tau)$, удовлетворяющая условиям 1)–3), называется *матрицей Грина* краевой задачи (2.3.1).

Упражнение 2. Показать, что матрица Грина краевой задачи (2.3.1) определяется условиями 1)–3) единственным образом.

Вернемся теперь к рассмотрению краевой задачи (2.3.4) для дифференциального уравнения. Очевидно, функция $u(t)$ является решением краевой задачи (2.3.4) тогда и только тогда, когда вектор-функция $\vec{u}(t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{u} = \widetilde{A}(t)\vec{u} + \widetilde{f}(t), \qquad t \in (a,b), \\ \mathcal{L}\vec{u}|_{t=a} + \mathcal{R}\vec{u}|_{t=b} = \varphi, \end{cases} \tag{2.3.6}$$

где

$$\widetilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \ \widetilde{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что выполнено условие однозначной разрешимости: $\widetilde{\Delta} \neq 0$. Тогда из сказанного выше следует, что при $\varphi = 0$ решение задачи (2.3.6) может быть записано в виде

$$\vec{u}(t) = \int\limits_a^b \widetilde{G}(t,\tau)\widetilde{f}(\tau)\,d\tau,$$

где $\widetilde{G}(t,\tau)$ — матрица Грина этой краевой задачи. С учетом вида вектор-функции $\widetilde{f}(t)$ получаем

$$u(t) = \int\limits_a^b g(t,\tau)h(\tau)\,d\tau,$$

где $g(t,\tau)$ — последний элемент первой строки матрицы $\widetilde{G}(t,\tau)$.

Из определения вытекает, что функция $g(t,\tau)$ обладает следующими свойствами:

1^0) при $t \neq \tau$ имеет место тождество $P_n\left(t, \dfrac{d}{dt}\right) g(t,\tau) \equiv 0$;

2^0) в квадрате $(a,b) \times (a,b)$ функция $g(t,\tau)$ и все ее производные $g^{(k)}(t,\tau)$, $k = 1,\dots,n-2$, непрерывны, а на диагонали производная $(n-1)$-го порядка имеет “скачок”, равный 1, т. е.:

$$\begin{aligned}
&g(\tau+0,\tau)-g(\tau-0,\tau)=0,\\
&g'(\tau+0,\tau)-g'(\tau-0,\tau)=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&g^{(n-2)}(\tau+0,\tau)-g^{(n-2)}(\tau-0,\tau)=0,\\
&g^{(n-1)}(\tau+0,\tau)-g^{(n-1)}(\tau-0,\tau)=1;
\end{aligned}$$

3^0) функция $g(t,\tau)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} g(a,\tau)\\ g'(a,\tau)\\ \vdots\\ g^{(n-1)}(a,\tau)\end{pmatrix}+\mathcal{R}\begin{pmatrix} g(b,\tau)\\ g'(b,\tau)\\ \vdots\\ g^{(n-1)}(b,\tau)\end{pmatrix}=0,\quad \tau\in(a,b).$$

Определение. Функция $g(t,\tau)$, удовлетворяющая условиям 1^0)–3^0), называется *функцией Грина* краевой задачи (2.3.4).

Упражнение 3. Показать, что функция Грина краевой задачи (2.3.4) определяется условиями 1^0)–3^0) единственным образом.

Доказательство приведенных утверждений можно прочитать, например, в [2, 7].

§ 2.4. Задача Штурма – Лиувилля

Рассмотрим на ограниченном интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}$ краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}+q(t)y+\lambda y=0, \qquad t\in(a,b),\\ l_1y+l_2\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=a}=0,\\ r_1y+r_2\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=b}=0, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

где $q(t)$ — вещественнозначная непрерывная функция на $[a, b]$, λ — числовой параметр, l_j, r_j, $j = 1, 2$, — вещественные числа, причем

$$|l_1| + |l_2| \neq 0, \qquad |r_1| + |r_2| \neq 0,$$

т. е. краевая задача (2.4.1) невырождена.

Определение. Значение параметра λ, при котором краевая задача (2.4.1) имеет нетривиальное решение, называется *собственным значением* краевой задачи (2.4.1), а соответствующее ему решение $y(t, \lambda) \not\equiv 0$ — *собственной функцией*.

Определение. Задача о нахождении собственных значений и собственных функций краевой задачи (2.4.1) называется *задачей Штурма – Лиувилля*.

Приведем основные утверждения о задаче Штурма – Лиувилля.

1. Для любого собственного значения λ краевой задачи (2.4.1) существует только одна линейно независимая собственная функция $y(t, \lambda)$.

2. Если $y(t, \lambda_1)$ и $y(t, \lambda_2)$ — собственные функции, соответствующие двум различным собственным значениям λ_1 и λ_2, то

$$\int\limits_a^b y(t, \lambda_1) y(t, \lambda_2)\, dt = 0,$$

т. е. собственные функции ортогональны.

3. Собственные значения краевой задачи (2.4.1) могут быть только вещественными.

4. Краевая задача (2.4.1) имеет счетное число собственных значений λ_j, $j = 1, 2, \ldots$, причем они ограничены снизу и неограниченны сверху, т. е.

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{j \to \infty} \lambda_j = \infty.$$

Отметим, что при доказательстве четвертого утверждения используется следующая теорема, которая представляет самостоятельный интерес.

Теорема Штурма (о сравнении). *Пусть функция* $y(t) \not\equiv 0$ *является решением уравнения*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)y = 0,$$

а функция $z(t) \not\equiv 0$ *— решением уравнения*

$$\frac{d^2z}{dt^2} + q(t)z = 0, \qquad (2.4.2)$$

где $Q(t)$, $q(t) \in C[a,b]$, *причем* $Q(t) \geq q(t)$. *Предположим, что* t_1, $t_2 \in [a,b]$ *— соседние нули функции* $z(t)$, *т. е.* $z(t_1) = z(t_2) = 0$ *и* $z(t) \neq 0$, $t \in (t_1, t_2)$. *Тогда существует по крайней мере одно значение* $t^* \in [t_1, t_2]$ *такое, что* $y(t^*) = 0$.

Следствие 1. *Пусть в условии теоремы выполнено строгое неравенство* $Q(t) > q(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. *Тогда на открытом интервале* (t_1, t_2) *существует по крайней мере один нуль функции* $y(t)$.

Следствие 2. *Любое решение* $z(t) \not\equiv 0$ *уравнения (2.4.2) при* $q(t) \leq 0$, $t \in [a,b]$, *не может иметь на* $[a,b]$ *более одного нуля.*

В заключение приведем теорему В. А. Стеклова, которая имеет очень важное значение при решении краевых задач для уравнений с частными производными.

Теорема (В. А. Стеклов). *Система собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (2.4.1) полна в* $L_2(a,b)$.

Доказательство приведенных утверждений можно прочитать, например, в [7].

Замечание. Все перечисленные утверждения о задаче (2.4.1) обобщаются для задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(p(t)\dfrac{dy}{dt}\right) + q(t)y + \lambda y = 0, \qquad t \in (a,b), \\ l_1 y + l_2 \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=a} = 0, \\ r_1 y + r_2 \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=b} = 0, \end{cases}$$

где вещественнозначные функции

$$p(t) \in C^1[a,b], \quad p(t) > 0, \quad q(t) \in C[a,b].$$

Упражнения (А. Кнезер).

1. Пусть $q(t) \geq \dfrac{1}{4t^2} + \dfrac{\varepsilon}{t^2}$, $\varepsilon > 0$, $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 > 0$. Доказать, что любое решение уравнения (2.4.2) имеет бесконечное число нулей.

2. Пусть $q(t) \leq \dfrac{1}{4t^2}$, $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 > 0$. Доказать, что любое решение $z(t) \not\equiv 0$ уравнения (2.4.2) имеет не более одного нуля.

ГЛАВА 3.
Нелинейные дифференциальные уравнения

В этой главе мы приведем некоторые сведения из теории нелинейных дифференциальных уравнений. Мы сформулируем классические теоремы о локальной разрешимости задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений, обсудим важное понятие непродолжаемого решения, приведем теоремы о непрерывной и дифференцируемой зависимости непродолжаемых решений задачи Коши, сформулируем теорему Ляпунова "о существовании решения в целом". В последнем параграфе мы рассмотрим некоторые классы дифференциальных уравнений, решения которых можно получить в квадратурах с помощью элементарных методов интегрирования, а также классы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

§ 3.1. Системы нелинейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{3.1.1}$$

где вектор-функция $f(t, y):\ G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ задана. В развернутой записи система (3.1.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Мы всегда будем рассматривать случай, когда вектор-функция $f(t, y)$ является непрерывной в области G.

Определение. *Решением* системы (3.1.1) на интервале (a, b) называется вектор-функция

$$y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T \in C^1(a, b)$$

такая, что

$$(t, y(t)) \in G \quad \text{при} \quad t \in (a, b),$$
$$\frac{d}{dt} y(t) \equiv f(t, y(t)) \quad \text{на} \quad (a, b).$$

Аналогичным образом дается определение решения системы (3.1.1) на отрезке $[a, b]$ (или на промежутках $[a, b)$, $(a, b]$) с той лишь разницей, что в граничных точках рассматриваются односторонние производные.

Определение. Множество всех точек

$$\{t, y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)\}, \qquad t \in (a, b),$$

называется *интегральной кривой* системы (3.1.1).

Основной задачей для системы (3.1.1), которую мы будем рассматривать, является задача Коши.

Определение. Пусть $(t_0, y_0) \in G$ — фиксированная точка. Задача о нахождении решения $y(t)$ системы (3.1.1), принимающего при $t = t_0$ значение y_0, называется *задачей Коши*:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y|_{t=t_0} = y_0. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Условие $y(t_0) = y_0$ называется *начальным условием.*

Очевидно, нахождение решения задачи Коши (3.1.2) геометрически эквивалентно построению интегральной кривой системы (3.1.1), проходящей через заданную точку (t_0, y_0).

В дальнейшем, чтобы не загромождать изложение, мы будем интересоваться решениями задачи Коши (3.1.2), определенными на интервале (a, b) или на отрезке $[a, b]$, для которых точка t_0 является внутренней. Следующая теорема гарантирует локальную разрешимость задачи Коши (3.1.2).

Теорема (Дж. Пеано). *Пусть замкнутый цилиндр*

$$Ц = \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad |t - t_0| \leq T, \quad \|y - y_0\| \leq r\} \tag{3.1.3}$$

содержится в области G. Обозначим

$$F = \max_{(t,y)\in Ц} \|f(t, y)\|, \qquad T_0 = \min\left\{T, \frac{r}{F}\right\}.$$

Тогда на отрезке $\{|t - t_0| \leq T_0\}$ существует решение задачи Коши (3.1.2).

Доказательство теоремы Пеано можно прочитать, например, в учебниках [2, 9, 10].

Отметим, что в теореме Пеано речь идет только о существовании решения задачи Коши. Простейшие примеры показывают, что для того, чтобы гарантировать единственность решения, нужны дополнительные требования на правую часть $f(t, y)$ системы дифференциальных уравнений.

В качестве одного из таких примеров рассмотрим следующую задачу Коши для скалярного уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{|y|}, \\ y|_{t=t_0} = y_0. \end{cases}$$

Для наглядности неединственности решения полезно нарисовать интегральные кривые в плоскости переменных (t, y), проходящие в окрестности оси Ot.

В следующей теореме гарантируется однозначная разрешимость задачи Коши (3.1.2).

Теорема (Э. Пикар). *Пусть цилиндр Ц содержится в области G и в этом цилиндре вектор-функция $f(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y, т. е. существует константа $L >$*

0 *такая, что для любых двух точек* (t, y^1), $(t, y^2) \in Ц$ *выполнено неравенство*

$$\|f(t, y^1) - f(t, y^2)\| \leq L\|y^1 - y^2\|.$$

Тогда на отрезке $\{|t - t_0| \leq T_0\}$, *указанном в теореме Пеано, определено единственное решение задачи Коши (3.1.2).*

Следствие. *Пусть вектор-функция* $f(t, y)$ *имеет непрерывные в области* G *производные* $\dfrac{\partial}{\partial y_j} f_i(t, y)$, $i,\ j = 1, \ldots n$. *Тогда на отрезке* $\{|t - t_0| \leq T_0\}$ *определено единственное решение задачи Коши (3.1.2).*

Доказательство теоремы Пикара можно прочитать, например, в [2, 9, 10]. Однако его нетрудно провести самостоятельно, используя схему, основанную на доказательстве следующей леммы.

Лемма 3.1.1. *Решение задачи Коши (3.1.2), определенное на некотором промежутке* $\langle a, b \rangle$, *при этом* $t_0 \in (a, b)$, *является решением системы интегральных уравнений*

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds. \tag{3.1.4}$$

И наоборот, непрерывное на $\langle a, b \rangle$ *решение системы интегральных уравнений (3.1.4) является решением задачи Коши (3.1.2).*

Из леммы 3.1.1 вытекает, что для доказательства теоремы Пикара достаточно доказать однозначную разрешимость на отрезке $\{|t - t_0| \leq T_0\}$ системы интегральных уравнений (3.1.4) в классе непрерывных вектор-функций.

Для доказательства разрешимости системы (3.1.4) построим последовательность вектор-функций $\{y^k(t)\}$ по следующему правилу:

$$
\begin{aligned}
&y^0(t) \equiv y_0, \\
&y^k(t) \equiv y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y^{k-1}(s))\, ds, \qquad k \geq 1.
\end{aligned}
\tag{3.1.5}
$$

Лемма 3.1.2. *На отрезке* $\{|t-t_0| \leq T_0\}$ *определены и непрерывны все вектор-функции* $y^k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Лемма 3.1.3. *На отрезке* $\{|t-t_0| \leq T_0\}$ *имеют место оценки*

$$
\|y^k(t) - y^{k-1}(t)\| \leq F L^{k-1} \frac{|t-t_0|^k}{k!}, \qquad k = 1, 2, \ldots.
$$

Лемма 3.1.4. *Последовательность* $\{y^k(t)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $\{|t-t_0| \leq T_0\}$, *при этом предельная функция* $y(t)$ *является непрерывным решением системы интегральных уравнений (3.1.4).*

Лемма 3.1.5. *Непрерывное на отрезке* $\{|t-t_0| \leq T_0\}$ *решение* $y(t)$ *системы (3.1.4) определено однозначно.*

Замечание 1. Отрезок $\{|t-t_0| \leq T_0\}$ называется *отрезком Пеано – Пикара.*

Замечание 2. Последовательность приближенных решений $\{y^k(t)\}$, определенных формулами (3.1.5), называется *последовательностью Пикара.* Из лемм 3.1.3, 3.1.4 можно получить оценку погрешности для k-го приближения Пикара.

Рассмотрим теперь скалярное дифференциальное уравнение произвольного порядка

$$
\frac{d^n u}{dt^n} = g\left(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right), \tag{3.1.6}
$$

где заданная функция $g : G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Определение. *Решением* уравнения (3.1.6) на интервале (a, b) называется функция

$$u(t) \in C^n(a, b)$$

такая, что

$$\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}}\right) \in G, \qquad t \in (a, b),$$

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} \equiv g\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}}\right) \quad \text{на} \quad (a, b).$$

Определение. Пусть $(t_0, u^0, u^1, \ldots, u^{n-1}) \in G$ — фиксированная точка. Следующая задача

$$\begin{cases} \dfrac{d^n u}{dt^n} = g\left(t, u, \dfrac{du}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right), \\ u|_{t=t_0} = u^0, \\ \left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_0} = u^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\dfrac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0} = u^{n-1} \end{cases} \tag{3.1.7}$$

называется *задачей Коши* для уравнения (3.1.6).

В следующей лемме показано, что решение задачи Коши (3.1.7) можно эквивалентным образом свести к решению задачи Коши вида (3.1.2).

Лемма 3.1.6. *Пусть $u(t)$ — решение дифференциального уравнения (3.1.6) на интервале (a, b), тогда вектор-функция*

$$y(t) = \left(u(t), \frac{du(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}}\right)^T$$

является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y = (y_1, \ldots, y_n)^T, \tag{3.1.8}$$

где
$$f(t,y) = (y_2, \dots, y_n, g(t, y_1, \dots, y_n))^T,$$
на интервале (a,b)*. И наоборот, пусть* $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ *— решение системы дифференциальных уравнений (3.1.8) на интервале* (a,b)*, тогда вектор-функция* $y(t)$ *имеет вид*
$$y(t) = \left(y_1(t), \frac{dy_1(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1(t)}{dt^{n-1}}\right)^T,$$
при этом $y_1(t)$ *удовлетворяет уравнению (3.1.6) на интервале* (a,b)*.*

Упражнение. Сформулируйте теорему об однозначной разрешимости задачи Коши (3.1.7), являющуюся аналогом теоремы Пикара.

§ 3.2. Непродолжаемые решения

В предыдущем параграфе мы сформулировали теоремы Пеано и Пикара, в которых изучается вопрос о *локальном* существовании решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), \\ y|_{t=t_0} = y_0. \end{cases} \tag{3.2.1}$$
В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о существовании решения задачи (3.2.1), определенного на максимально широком интервале (t_-, t_+). Для этой цели мы дадим некоторые новые определения.

Определение. Пусть $y(t)$ и $\widetilde{y}(t)$ — решения системы
$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad f(t,y) \in C(G), \tag{3.2.2}$$
определенные на промежутках $\langle a,b\rangle$ и $\langle \widetilde{a}, \widetilde{b}\rangle$ соответственно, при этом $\langle a,b\rangle \subset \langle \widetilde{a}, \widetilde{b}\rangle$ и $y(t) \equiv \widetilde{y}(t)$ при $t \in \langle a,b\rangle$. Тогда решение

$\widetilde{y}(t)$ называется *продолжением* решения $y(t)$ с $\langle a, b\rangle$ на $\langle \widetilde{a}, \widetilde{b}\rangle$, а решение $y(t)$ — *сужением* решения $\widetilde{y}(t)$ на $\langle a, b\rangle$.

Определение. Решение $y(t)$ системы дифференциальных уравнений (3.2.2), определенное на промежутке $\langle t_-, t_+\rangle$, называется *непродолжаемым*, если не существует решения системы (3.2.2) с более широкой областью определения, сужение которого на $\langle t_-, t_+\rangle$ совпадало бы с $y(t)$.

Упражнение. Нарисовать интегральные кривые в плоскости переменных (t, y) для задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -\varepsilon y + y^2, \qquad \varepsilon > 0, \\ y\big|_{t=0} = y_0. \end{cases}$$

Определить зависимость интервала (t_-, t_+) от параметров ε и y_0.

В дальнейшем будем предполагать, что вектор-функция $f(t, y)$ удовлетворяет условиям теоремы Пикара.

Теорема 3.2.1. *Для любой начальной точки $(t_0, y_0) \in G$ задача Коши (3.2.1) имеет единственное непродолжаемое решение $y(t)$, определенное на некотором интервале (t_-, t_+).*

Доказательство этой теоремы можно прочитать в [10, 12].

Следующие две теоремы позволяют получить наглядное объяснение того, что интервал (t_-, t_+) определения непродолжаемого решения $y(t)$ задачи Коши (3.2.1) является наиболее широким интервалом, на котором может существовать решение этой задачи.

Теорема 3.2.2. *Пусть $y(t)$ — непродолжаемое решение задачи Коши (3.2.1) с интервалом определения (t_-, t_+). Тогда для любого компакта $K \subset G$ существует отрезок $[t_1, t_2] \subset (t_-, t_+)$ такой, что $(t, y(t))$ не принадлежит K при $t \notin [t_1, t_2]$.*

Теорема 3.2.3. *Пусть область G является полосой*

$$G = \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ t \in (a, b), \ y \in \mathbb{R}^n\} \tag{3.2.3}$$

и $y(t)$ — непродолжаемое решение задачи Коши (3.2.1) с интервалом определения (t_-, t_+). Тогда

а) *либо $t_+ = b$, либо $t_+ < b$ и $\|y(t)\| \to \infty$ при $t \to t_+$;*

б) *либо $t_- = a$, либо $t_- > a$ и $\|y(t)\| \to \infty$ при $t \to t_-$.*

Доказательство этой теоремы можно прочитать в [12].

Приведем теперь две теоремы о *глобальном* существовании решения задачи Коши.

Теорема 3.2.4 (А.Уинтнер). *Пусть область G является полосой (3.2.3). Предположим, что вектор-функция $f(t, y)$ удовлетворяет условию*

$$\|f(t, y)\| \le \varphi(t) g(\|y\|),$$

где $\varphi(t) > 0$ — непрерывная функция на $[a, b]$, $g(u) > 0$ — непрерывная функция на $[0, \infty)$, при этом для любого $\rho > \rho_0 > 0$

$$\int\limits_{\rho}^{\infty} \frac{1}{g(u)} du = \infty.$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, y_0) \in G$ непродолжаемое решение задачи Коши (3.2.1) определено на всем интервале (a, b).

Доказательство этой теоремы можно прочитать в [12].

Рассмотрим задачу Коши для систем дифференциальных уравнений в случае, когда вектор-функция, стоящая в правой части, не зависит от параметра t. Такие системы называются *автономными.* Очевидно, в задаче Коши для таких систем в качестве начальной точки t_0 без ограничения общности можно взять $t_0 = 0$, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y), \\ y|_{t=0} = y_0. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Будем предполагать, что вектор-функция $f(y)$ является непрерывно дифференцируемой в шаре $B_r = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \|y\| \le r\}$, при этом $f(0) = 0$. Тогда, очевидно, $y(t) \equiv 0$ является непродолжаемым решением задачи Коши (3.2.4) при $y_0 = 0$, определенным на вещественной оси $\mathbb{R}$. Мы сформулируем знаменитую теорему Ляпунова, в которой даются достаточные условия на $f(y)$, гарантирующие, что непродолжаемое решение задачи Коши (3.2.4) определено на правой полуоси $\{t \ge 0\}$ при всех достаточно малых начальных данных y_0.

Вначале дадим следующее определение.

Определение. Функция $H(y)$, определенная в шаре B_r, называется *функцией Ляпунова* для автономной системы дифференциальных уравнений (3.2.4), если выполнены следующие три условия:

1) $H(y) \in C^1(B_r)$;

2) $H(y) \ge 0$ в B_r, причем $H(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$;

3) $\langle f(y), \nabla H(y) \rangle \equiv \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} H(y) \le 0$ в B_r.

Теорема 3.2.5 (А. М. Ляпунов). *Пусть в шаре B_r для системы дифференциальных уравнений (3.2.4) существует функция Ляпунова. Тогда существует $\rho \in (0, r)$ такое, что при любых начальных данных $y_0 \in B_\rho$ непродолжаемое решение задачи Коши (3.2.4) определено на всей полуоси $\{t \ge 0\}$.*

Доказательство теоремы Ляпунова можно прочитать, например, в [5].

§ 3.3. Зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных данных

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с параметрами $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \mu). \tag{3.3.1}$$

Будем предполагать, что

а1) вещественнозначная вектор-функция $f(t, y, \mu)$ определена и непрерывна в области $B \subseteq \mathbb{R}^{n+k+1}$;

б1) существуют частные производные $\dfrac{\partial}{\partial y_j} f_i(t, y, \mu), \quad i,\ j = 1, \ldots, n$, которые также непрерывны в B.

Из этих предположений следует, что для любой точки $(t_0, y_0, \mu) \in B$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y, \mu), \\ y|_{t=t_0} = y_0. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Будем обозначать это решение через $y(t, \mu)$, а интервал существования через $(t_-(\mu), t_+(\mu))$. Введем множество

$$\mathfrak{M} = \{(t, \mu) \in \mathbb{R}^{k+1} :\ (t_0, y_0, \mu) \in B,\ t \in (t_-(\mu), t_+(\mu))\}.$$

Теорема 3.3.1. *Множество $\mathfrak{M}$ — открытое в $\mathbb{R}^{k+1}$, и вектор-функция $y(t, \mu)$ является непрерывной на $\mathfrak{M}$.*

Рассмотрим теперь задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y|_{t=t_0} = y_0, \end{cases} \tag{3.3.3}$$

где вещественнозначная вектор-функция $f(t, y)$ определена в области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и удовлетворяет следующим условиям:

а2) $f(t,y)$ непрерывна в G;

б2) существуют частные производные $\dfrac{\partial}{\partial y_j} f_i(t,y)$, $i,j=1,\ldots,n$, которые также непрерывны в G.

Предположим, что $(t_0,y_0)\in G$. Как мы знаем, задача Коши (3.3.3) имеет единственное непродолжаемое решение. Ясно, что при изменении начальных данных (t_0,y_0) интервал существования этого решения, вообще говоря, может меняться. Обозначим непродолжаемое решение задачи (3.3.3) через $y(t,t_0,y_0)$, а интервал его существования через $(t_-(t_0,y_0),t_+(t_0,y_0))$. Введем множество

$$\widetilde{\mathfrak{M}}=\{(t,t_0,y_0)\in\mathbb{R}^{n+2}:\ (t_0,y_0)\in G,\ t\in(t_-(t_0,y_0),t_+(t_0,y_0))\}.$$

Теорема 3.3.2. *Множество $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — открытое в $\mathbb{R}^{n+2}$, и вектор-функция $y(t,t_0,y_0)$ является непрерывной на $\widetilde{\mathfrak{M}}$.*

Вернемся к рассмотрению системы (3.3.1), но в дополнение к условиям а1) и б1) предположим, что

в1) существуют частные производные $\dfrac{\partial}{\partial \mu_l} f_i(t,y,\mu)$, $i=1,\ldots,n$, $l=1,\ldots,k$, которые также непрерывны в B.

Это дополнительное условие на вектор-функцию $f(t,y,\mu)$ влечет дифференцируемость непродолжаемого решения по параметрам μ_k. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 3.3.3. *При выполнении условий а1), б1), в1) справедливы следующие утверждения.*

1. *Существуют частные производные $\dfrac{\partial}{\partial \mu_l} y_i(t,\mu)$, $i=1,\ldots,n$, $l=1,\ldots,k$, которые непрерывны на $\mathfrak{M}$.*

2. *Существуют частные производные*

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial\mu_l} y_i(t,\mu),\quad \frac{\partial^2}{\partial\mu_l\partial t} y_i(t,\mu),\qquad i=1,\ldots,n,\quad l=1,\ldots,k,$$

которые непрерывны на $\mathfrak{M}$.

3. *Вектор-функция* $v_l(t, \mu) = \dfrac{\partial}{\partial \mu_l} y(t, \mu)$ *является решением задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{dv_l}{dt} = \left(\dfrac{\partial}{\partial y} f(t, y(t, \mu), \mu)\right) v_l + \dfrac{\partial}{\partial \mu_l} f(t, y(t, \mu), \mu), \\ v_l\big|_{t=t_0} = 0. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Следствие. *На множестве* $\mathfrak{M}$ *выполнены тождества*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial \mu_l} y_i(t, \mu) \equiv \frac{\partial^2}{\partial \mu_l \partial t} y_i(t, \mu), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Определение. Система уравнений в (3.3.4) называется *системой уравнений в вариациях* (по параметрам) для системы (3.3.1).

Рассмотрим теперь задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y\big|_{t=t_0} = \xi, \end{cases} \tag{3.3.5}$$

где вектор-функция $f(t, y)$ определена в области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и удовлетворяет условиям а2), б2), $(t_0, \xi) \in G$. Как мы знаем, эта задача имеет единственное непродолжаемое решение $y(t, \xi)$. Обозначим интервал существования $y(t, \xi)$ через $(t_-(\xi), t_+(\xi))$. Введем множество

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_0 = \big\{(t, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ (t_0, \xi) \in G, \ t \in (t_-(\xi), t_+(\xi))\big\}.$$

Из сказанного выше следует, что множество $\widetilde{\mathfrak{M}}_0$ является открытым в $\mathbb{R}^{n+1}$ и вектор-функция $y(t, \xi)$ является непрерывной на $\widetilde{\mathfrak{M}}_0$.

Теорема 3.3.4. *Существуют частные производные*

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} y_i(t, \xi), \quad \frac{\partial^2}{\partial t \partial \xi_j} y_i(t, \xi), \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial t} y_i(t, \xi),$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

которые непрерывны на $\widetilde{\mathfrak{M}}_0$.

Следствие 1. *Вектор-функция* $v_j(t, \xi) = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j} y(t, \xi)$ *является решением задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{dv_j}{dt} = \left(\dfrac{\partial}{\partial y} f(t, y(t, \xi)) \right) v_j, \\ v_j \big|_{t=t_0} = e_j, \end{cases} \tag{3.3.6}$$

где e_j *— единичный вектор,* j*-я компонента которого равна* 1.

Следствие 2. *Имеет место тождество*

$$\det \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} y_i(t, \xi) \right) \equiv \exp \left(\int\limits_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} f_k(\tau, y(\tau, \xi))\, d\tau \right).$$

Определение. Система уравнений в (3.3.6) называется *системой уравнений в вариациях* (по начальным значениям) для системы (3.3.5).

Доказательство приведенных теорем можно прочитать, например, в [1, 2, 9, 10].

§ 3.4. Автономные системы

Рассмотрим вначале общую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{3.4.1}$$

где вещественнозначная вектор-функция $f(t, y)$ определена в области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и удовлетворяет следующим условиям:

а) $f(t, y)$ непрерывна в G;

б) существуют частные производные $\dfrac{\partial}{\partial y_j} f_i(t, y)$, $i, j = 1, \ldots, n$, которые также непрерывны в G.

Определение. *Траекторией решения* $y(t)$ системы (3.4.1), определенного на интервале (t_-, t_+), называется множество точек

$$S = \{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}, \qquad t \in (t_-, t_+),$$

фазового пространства Oy.

Рассмотрим теперь автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \qquad f(y) \in C^1(B), \quad B \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{3.4.2}$$

Отметим, что траектории автономных систем обладают свойством непересечения (как и интегральные кривые системы (3.4.1) в пространстве Oty). Поэтому при исследовании (3.4.2) целесообразно рассматривать именно траектории (а не интегральные кривые), поскольку они принадлежат пространству, размерность которого на единицу меньше. Этот результат вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $y(t, t_0, y_0)$ *— непродолжаемое решение системы (3.4.2), определенное на интервале* (t_-, t_+) *и такое, что его интегральная кривая проходит через точку* (t_0, y_0). *Тогда*

$$y(t + c, t_0 + c, y_0) = y(t, t_0, y_0)$$

при любых t, $(t + c) \in (t_-, t_+)$.

Следствие. *Если траектории* S_1 *и* S_2 *системы (3.4.2) пересекаются в точке* y_0, *то* $S_1 = S_2$.

Замечание. Если ввести обозначение

$$\varphi(t, y_0) = y(t, 0, y_0),$$

то фазовую траекторию системы (3.4.2) можно параметрически задавать уравнением

$$y = \varphi(t, y_0).$$

Теорема 3.4.2. *Пусть $\varphi(t, y_0)$ определена на $(-\infty, \infty)$. Тогда справедливо групповое свойство*

$$\varphi(t + \tau, y_0) = \varphi(t, \varphi(\tau, y_0)).$$

Определение. Точка $a = (a_1, \ldots, a_n)$ называется *положением равновесия* системы (3.4.2), если $f(a) = 0$.

Очевидно, если $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — положение равновесия системы (3.4.2), то $y(t) \equiv a$ — решение системы (3.4.2) на $(-\infty, \infty)$, и следовательно, точка $y = a$ — траектория.

Из следствия к теореме 3.4.1 вытекает, что траектория, отличная от положения равновесия, является гладкой кривой.

Теорема 3.4.3. *Каждая траектория системы (3.4.2) принадлежит к одному из трех типов:*

1) *точка;*

2) *гладкая кривая без самопересечений;*

3) *замкнутая гладкая кривая (цикл), и в этом случае определяющее решение $y(t) = \varphi(t, y_0)$ является периодической функцией.*

Более подробно о свойствах автономных систем см. в [1, 9, 10].

§ 3.5. Приемы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений

Развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений началось с исследований И. Ньютона (1643–1727), Г. Лейбница (1646–1716) и их ближайших последователей. Бóльшая часть элементарных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений была разработана в 18-м столетии крупнейшими математиками того времени: Ж. Даламбер (1717–1783), братья Бернулли, А. Клеро (1713–1765), А. Лежандр (1752–1833), Ж. Лагранж (1736–1813), П. Лаплас (1749–1827), Г. Монж (1746–1818), Дж. Риккати (1676–1754), Л. Эйлер (1707–1783). Некоторые из этих методов изучаются в университетском курсе по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые классы дифференциальных уравнений, решения которых можно получить в квадратурах с помощью элементарных методов интегрирования, а также классы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Дифференциальные уравнения с *разделяющимися переменными*

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t)\, f_2(y). \tag{3.5.1}$$

Теорема 3.5.1. *Пусть $f_1(t) \in C(a,b)$, $f_2(y) \in C(c,d)$. Если $f_2(y) \neq 0$, то для любых $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$ уравнение (3.5.1) имеет единственное решение $y(t)$, удовлетворяющее условию $y(t_0) = y_0$.*

Доказательство теоремы элементарное, и решение определяется, очевидно, из интегрального уравнения

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{1}{f_2(\eta)}\, d\eta = \int\limits_{t_0}^{t} f_1(\xi)\, d\xi. \tag{3.5.2}$$

2. Неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + f(t). \tag{3.5.3}$$

Частным случаем теоремы 1.2.1 является следующая теорема.

Теорема 3.5.2. *Пусть $a(t)$, $f(t) \in C(a,b)$. Тогда для любых $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ уравнение (3.5.3) имеет единственное решение $y(t)$, удовлетворяющее условию $y(t_0) = y_0$.*

Приведем еще одно доказательство существования решения с использованием дифференциального уравнения с разделяющимися переменными и метода вариации произвольной постоянной.

Вначале рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения, которое является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = a(t)y, \\ y|_{t=t_0} = y_0. \end{cases} \tag{3.5.4}$$

Если $y_0 = 0$, то существует только тривиальное решение $y(t) \equiv 0$. Если $y_0 > 0$ или $y_0 < 0$, то в полуплоскости $\{y > 0\}$ или $\{y < 0\}$ соответственно можно применить теорему 3.5.1. Тогда из интегрального уравнения (3.5.2) получим формулу решения

$$y(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} a(\xi)\, d\xi} y_0.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} a(\xi)\, d\xi} c.$$

Тогда решение неоднородного уравнения (3.5.3) можно искать в виде

$$y(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} a(\xi)\, d\xi} c(t). \tag{3.5.5}$$

Подставляя это выражение в (3.5.3), получим

$$e^{\int\limits_{t_0}^{t} a(\xi)\, d\xi} \frac{d}{dt} c(t) \equiv f(t).$$

Отсюда

$$c(t) = c(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\int\limits_{t_0}^{\eta} a(\xi)\, d\xi} f(\eta)\, d\eta,$$

и в силу (3.5.5) имеем

$$y(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} a(\xi)\,d\xi} c(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{\eta}^{t} a(\xi)\,d\xi} f(\eta)\,d\eta.$$

Учитывая, что $y(t_0) = y_0$, получаем $c(t_0) = y_0$, т. е.

$$y(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} a(\xi)\,d\xi} y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{\eta}^{t} a(\xi)\,d\xi} f(\eta)\,d\eta.$$

Непосредственной постановкой в (3.5.3) нетрудно убедиться в том, что эта функция является решением.

3. *Уравнение Бернулли*

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(t)y + \beta(t)y^{\gamma}, \qquad y > 0, \tag{3.5.6}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0,\ 1$, $\alpha(t)$, $\beta(t) \in C(a,b)$. Делая замену $u(t) = y^{1-\gamma}(t)$, сводим уравнение (3.5.6) к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{du}{dt} = (1-\gamma)\alpha(t)u + (1-\gamma)\beta(t).$$

4. *Уравнение Риккати*

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(t)y + \beta(t)y^2 + f(t), \tag{3.5.7}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t) \in C(a,b)$. В общем случае, как показал Ж. Лиувилль (1841 г.), это уравнение не интегрируется в квадратурах. Простейшим таким примером является уравнение

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + t^2.$$

Но если известно одно частное решение $y_1(t)$ уравнения (3.5.7), то его можно решить в квадратурах, сделав замену

$$y(t) = y_1(t) + u(t).$$

Тогда это уравнение, очевидно, сводится к уравнению Бернулли

$$\frac{du}{dt} = (\alpha(t) + 2\beta(t)y_1(t))u + \beta(t)u^2.$$

Упражнение 1. Доказать, что уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dt} = \beta y^2 + ht^\gamma \tag{3.5.8}$$

с постоянными коэффициентами β, h при

$$\gamma = \frac{4k}{1-2k}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

интегрируется в квадратурах путем сведения к уравнению

$$\frac{du}{dt} = \beta u^2 + h.$$

5. Дифференциальные уравнения с однородной правой частью *нулевой степени*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{3.5.9}$$

т. е.

$$f(ct, cy) \equiv f(t, y). \tag{3.5.10}$$

Из условия (3.5.10), очевидно, следует, что если точка $(t_0, y_0) \neq (0, 0)$ принадлежит области определения функции $f(t, y)$, то этой же области принадлежит весь луч $l = \{ct_0, cy_0\}$, $c > 0$. Из (3.5.10) также следует, что в полуплоскости $\{t > 0\}$ или $\{t < 0\}$

$$f(t, y) \equiv f\left(1, \frac{y}{t}\right).$$

Следовательно, при выполнении условия (3.5.10) уравнение (3.5.9) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = F\left(\frac{y}{t}\right), \qquad t \neq 0. \tag{3.5.11}$$

Отметим, что в литературе уравнения вида (3.5.11) часто называют *однородными.*

Теорема 3.5.3. *Пусть $F(u) \in C(a, b)$. Если $F(u) - u \neq 0$, то для любых (t_0, y_0), $a < \dfrac{y_0}{t_0} < b$ уравнение (3.5.11) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $y(t_0) = y_0$.*

Доказательство теоремы вытекает непосредственно из теоремы 3.5.1 путем замены

$$u(t) = \frac{y(t)}{t}.$$

Очевидно, функция $u(t)$ однозначно определяется из уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dt} = \frac{F(u) - u}{t}$$

и условия $u|_{t=t_0} = \dfrac{y_0}{t_0}$. Тогда $y(t) = tu(t)$ является искомым решением.

Упражнение 2. Доказать, что уравнение Риккати (3.5.8) при $\gamma = -2$ сводится к дифференциальному уравнению с однородной правой частью нулевой степени и, следовательно, интегрируется в квадратурах.

Упражнение 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = F\left(\frac{at + by + c}{\alpha t + \beta y + \gamma}\right). \tag{3.5.12}$$

а. Предположим, что прямые

$$\Pi_1 = \{at + by + c = 0\} \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \{\alpha t + \beta y + \gamma = 0\}$$

пересекаются в точке (t_0, y_0). Проверить, что заменой

$$u = y - y_0, \qquad s = t - t_0$$

уравнение (3.5.12) сводится к однородному уравнению.

б. Предположим, что прямые Π_1 и Π_2 не пересекаются. Показать, что заменой

$$u(t) = at + by(t)$$

уравнение (3.5.12) сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

6. *Уравнение в полных дифференциалах.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}. \tag{3.5.13}$$

Будем предполагать, что функции $M(t,y)$, $N(t,y)$ определены в области $G \subseteq \mathbb{R}^2$, $N(t,y) \neq 0$.

Определение. Уравнение (3.5.13) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует функция $z(t,y) \in C^1(G)$ такая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} z(t,y) \equiv M(t,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} z(t,y) \equiv N(t,y). \tag{3.5.14}$$

Функция $z(t,y)$ называется *потенциалом.*

Используя симметричную форму записи уравнения (3.5.13)

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0,$$

можно записать уравнение в полных дифференциалах в виде

$$dz(t,y) = 0.$$

Следовательно, решение $y(t)$ уравнения определяется как неявная функция из функционального уравнения

$$z(t,y) = c.$$

В частности, решение задачи Коши для уравнения (3.5.13) с начальными данными

$$y|_{t=t_0} = y_0, \qquad (t_0, y_0) \in G,$$

определяется из уравнения

$$z(t, y) = z(t_0, y_0).$$

Сформулируем хорошо известную из математического анализа теорему, устанавливающую условия, при которых дифференциальное уравнение (3.5.13) является уравнением в полных дифференциалах.

Теорема 3.5.4. *Пусть $M(t, y)$, $N(t, y) \in C^1(G)$. Для того чтобы уравнение (3.5.13) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо, а в случае односвязной области G и достаточно, чтобы выполнялось тождество*

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} M(t, y). \tag{3.5.15}$$

При этом потенциал имеет вид

$$z(t, y) = \int\limits_{(t_0, y_0)}^{(t, y)} M(t, y)\, dt + N(t, y)\, dy, \tag{3.5.16}$$

где $(t_0, y_0) \in G$ — любая фиксированная точка, а интеграл берется по кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$, соединяющей точки (t_0, y_0) и (t, y) (он не зависит от пути интегрирования).

Отметим, что при интегрировании конкретных дифференциальных уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать общую формулу (3.5.16). Потенциал $z(t, y)$ легко находится с учетом условия (3.5.15). Действительно, если $z(t, y)$ — потенциал, то из (3.5.14) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} z(t, y) \equiv M(t, y).$$

Отсюда

$$z(t, y) = \int\limits_{t_0}^{t} M(\tau, y)\, d\tau + \varphi(y), \tag{3.5.17}$$

где $\varphi(y)$ — произвольная гладкая функция. Учитывая условие (3.5.15), имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} z(t,y) \equiv \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial y} M(\tau,y)\,d\tau + \frac{d}{dy}\varphi(y)$$

$$\equiv \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \tau} N(\tau,y)\,d\tau + \frac{d}{dy}\varphi(y) \equiv N(t,y) - N(t_0,y) + \frac{d}{dy}\varphi(y).$$

Следовательно, принимая во внимание второе тождество из (3.5.14), получаем

$$\frac{d}{dy}\varphi(y) \equiv N(t_0,y).$$

Поэтому функцию $\varphi(y)$ можно взять в виде

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(t_0,\xi)\,d\xi,$$

и подставляя в (3.5.17), имеем

$$z(t,y) = \int_{t_0}^{t} M(\tau,y)\,d\tau + \int_{y_0}^{y} N(t_0,\xi)\,d\xi.$$

Очевидно, эта функция является потенциалом уравнения (3.5.13).

Итак, интегрирование уравнения в полных дифференциалах не вызывает затруднений. Возникает естественный вопрос: нельзя ли произвольное уравнение (3.5.13) привести к уравнению в полных дифференциалах, записывая его в виде

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\mu(t,y)M(t,y)}{\mu(t,y)N(t,y)} \tag{3.5.18}$$

или рассматривая симметричную форму

$$\mu(t,y)M(t,y)\,dt + \mu(t,y)N(t,y)\,dy = 0\ ?$$

Определение. Функция $\mu(t,y) \in C(G)$, $\mu(t,y) \not\equiv 0$, называется *интегрирующим множителем* дифференциального уравнения (3.5.13), если уравнение (3.5.18) является уравнением в полных дифференциалах.

Для нахождения интегрирующего множителя $\mu(t,y) \in C^1(G)$ в силу теоремы 3.5.4 следует найти решение дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu N(t,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu M(t,y))$$

или

$$N(t,y)\frac{\partial \mu}{\partial t} - M(t,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial}{\partial y}M(t,y) - \frac{\partial}{\partial t}N(t,y)\right). \quad (3.5.19)$$

Построение решений уравнения (3.5.19) является сложной задачей. Однако при решении конкретных дифференциальных уравнений (3.5.13) достаточно найти хотя бы одно ненулевое решение уравнения (3.5.19). Зачастую это удается сделать, учитывая какие-либо особенности уравнения (3.5.19).

Приведем теперь несколько типов дифференциальных уравнений

$$F(t,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0, \quad (3.5.20)$$

допускающих сведение к дифференциальным уравнениям меньшего порядка.

7. *Уравнения, не содержащие y.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$F(t,y^{(k)},\ldots,y^{(n)}) = 0.$$

Очевидно, порядок уравнения понижается посредством замены

$$u(t) = y^{(k)}(t),$$

т. е.

$$F(t,u,\ldots,u^{(n-k)}) = 0.$$

8. *Уравнения, не содержащие t.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.5.21}$$

Для нахождения непостоянных решений $y(t) \not\equiv \mathrm{const}$ понизим порядок уравнения, взяв в качестве нового аргумента y и вводя неизвестную функцию $p(y)$ по формуле

$$p(y) = \frac{dy}{dt}.$$

Тогда, очевидно, имеем следующие тождества:

$$\frac{d}{dt}y(t) \equiv p(y(t)),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) \equiv \frac{dp}{dy}\bigg|_{y=y(t)}\frac{d}{dt}y(t) \equiv \left[p\frac{dp}{dy}\right]\bigg|_{y=y(t)},$$

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) \equiv \frac{d}{dy}\left[p\frac{dp}{dy}\right]\bigg|_{y=y(t)}\frac{d}{dt}y(t) \equiv p\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\right]\bigg|_{y=y(t)}$$

и т. д. В силу этих тождеств уравнение (3.5.21) в новых переменных имеет порядок $(n-1)$:

$$\widetilde{F}(y, p, \dots, p^{(n-1)}) = 0.$$

9. Уравнения, определяемые *однородными* функциями F.

Вначале рассмотрим дифференциальное уравнение (3.5.20), в котором функция $F(t, u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ является однородной относительно $u_1, \dots, u_{n+1}$ степени k, т. е.

$$F(t, cu_1, cu_2, \dots, cu_{n+1}) \equiv c^k F(t, u_1, u_2, \dots, u_{n+1}).$$

Порядок такого уравнения можно понизить, сделав замену

$$y'(t) = y(t)z(t),$$

где $z(t)$ — новая неизвестная функция. Очевидно, имеем следующие тождества:

$$y''(t) \equiv y'(t)z(t) + y(t)z'(t) \equiv y(t)[z^2(t) + z'(t)],$$

$$y'''(t) \equiv y'(t)[z^2(t) + z'(t)] + y(t)\frac{d}{dt}[z^2(t) + z'(t)]$$
$$\equiv y(t)\left[z(t)[z^2(t) + z'(t)] + \frac{d}{dt}[z^2(t) + z'(t)]\right]$$

и т. д. В силу этих тождеств уравнение (3.5.20) можно переписать в виде

$$0 = F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = y^k \widetilde{F}(t, z, z', \ldots, z^{(n-1)}).$$

Поэтому для нахождения нетривиальных решений исходного уравнения n-го порядка нужно рассматривать уравнение $(n-1)$-го порядка

$$\widetilde{F}(t, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (3.5.20), в котором функция $F(t, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ является *обобщенно однородной* степени k:

$$F(ct, c^m u_1, c^{m-1} u_2, \ldots, c^{m-n} u_{n+1}) \equiv c^k F(t, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}).$$

Тогда, например, при $t > 0$ уравнение (3.5.20) можно переписать в виде

$$F\left(1, \frac{y}{t^m}, \frac{y'}{t^{m-1}}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{t^{m-n}}\right) = 0. \qquad (3.5.22)$$

Введем новую функцию

$$z(t) = \frac{y(t)}{t^m}.$$

Имеем следующие тождества:

$$y'(t) \equiv z'(t)t^m + mz(t)t^{m-1},$$

$$\frac{y'(t)}{t^{m-1}} \equiv z'(t)t + mz(t),$$
$$y''(t) \equiv z''(t)t^m + 2mz'(t)t^{m-1} + m(m-1)z(t)t^{m-2},$$
$$\frac{y''(t)}{t^{m-2}} \equiv z''(t)t^2 + 2mz'(t)t + m(m-1)z(t)$$
и т. д.

Из этих тождеств вытекает, что каждая дробь $\dfrac{y^{(l)}(t)}{t^{m-l}}$ в уравнении (3.5.22) может быть представлена в виде

$$\frac{y^{(l)}(t)}{t^{m-l}} \equiv t^l z^{(l)}(t) + a_1 t^{l-1} z^{(l-1)}(t) + \ldots a_l z(t),$$

при этом коэффициенты a_j — постоянные и легко вычисляются. Правая часть этого тождества, очевидно, напоминает правую часть уравнения Эйлера

$$t^l z^{(l)} + a_1 t^{l-1} z^{(l-1)} + \cdots + a_l z = f(t), \qquad t > 0.$$

Поэтому, сделав замену переменной $t = e^s$, получаем

$$\frac{y^{(l)}(t)}{t^{m-l}} \equiv \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds} - I\right) \ldots \left(\frac{d}{ds} - (l-1)I\right) \widetilde{z}(s)$$

$$+ a_1 \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds} - I\right) \ldots \left(\frac{d}{ds} - (l-2)I\right) \widetilde{z}(s) + \cdots + a_l \widetilde{z}(s),$$

т. е. правая часть этого тожества имеет вид

$$P_l\left(\frac{d}{ds}\right) \widetilde{z}(s),$$

где $P_l\left(\dfrac{d}{ds}\right)$ — дифференциальный оператор l-го порядка с постоянными коэффициентами. Следовательно, в новых переменных дифференциальное уравнение (3.5.22) можно переписать следующим образом:

$$\widetilde{F}(\widetilde{z}, \widetilde{z}', \ldots, \widetilde{z}^{(n)}) = 0.$$

Поскольку это уравнение явно не содержит независимую переменную s, то, как уже было показано в п. 8, оно сводится к дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка.

Мы рассмотрели основные методы решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, которые изучаются на семинарских занятиях по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для овладения этими методами, конечно, необходимо самостоятельно решать конкретные задачи. Большое количество задач содержится, например, в [11]. Читатели, желающие более основательно познакомиться с методами интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, могут самостоятельно освоить элементы теории групп Ли и ее применения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [6, 8]). Применение теории групп Ли существенно расширяет круг дифференциальных уравнений, решаемых в квадратурах.

Список литературы

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.
2. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие. 2-е изд., переб. СПб: Издательство С.-Петербургского университета, 2005.
3. *Годунов С. К., Гордиенко В. М., Демиденко Г. В., Золотарева Е. В., Костин В. И., Фадеев С. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1986.
4. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т. 1: Краевые задачи. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. 3-е изд., стереотип. СПб.: Лань, 2008.
6. *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Знание, 1991.
7. *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981.
8. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: URSS, 2009.
10. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. 5-е изд. М.: Наука, 1982.

11. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие. Изд-е 4-е. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2011.

12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Содержание

Демиденко Геннадий Владимирович
Матвеева Инесса Изотовна

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для студентов направления
"Информатика и вычислительная техника"

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 25.02.16. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 4,94. Тираж 35 экз. Зак. № 161505. Рег. № 6

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института.
658207, г. Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.